Tipps zur Serie 2:

Aufgabe 2.1:

Repetiert die Axiome der Norm und des Skalarproduktes und beweist sie dann für die jeweiligen Funktionen. Versucht wie immer möglichst allgemein zu bleiben und die Stetigkeit der Funktionen auszunutzen.

Aufgabe 2.2:

a)

Betrachtet auch hier die 3 Axiome einer Metrik. Macht euch keine zu grosse Arbeit, ihr könnt vieles direkt aus der euklidischen Norm ableiten. Wichtig: Um die Dreiecksungleichung zu beweisen, müsst ihr eine Fallunterscheidung machen! (Ihr wollt $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$ zeigen, es gibt 5 Fälle.)

b)

Überlegt euch, in welchem Fall der Metrik ihr seid, und was der Grenzwert der Folge ist.

c)

Könnt den Wikipedia Artikel lesen, ist noch lustig und kann man sich fast schon selbst denken.

Aufgabe 2.3:

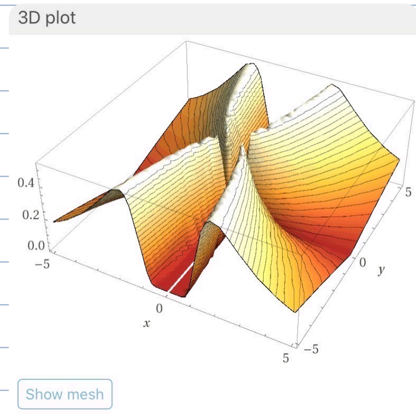
Wiederum die Metrikaxiome betrachten

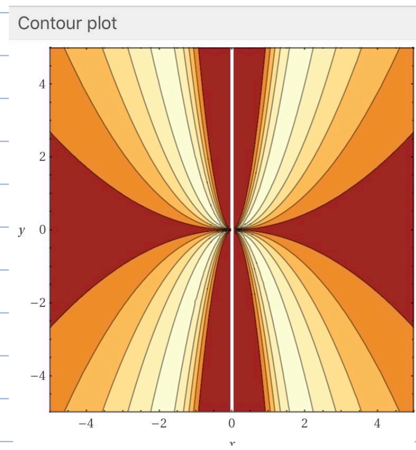
Aufgabe 2.4:

Erster Einblick in mehrdimensionale Funktionen, unbedingt aufpassen! Die Aufgabe soll euch die Tücken der Stetigkeitsbetrachtung aufzeigen.

a)

Betrachtet $x = 0$ & $x \neq 0$ gesondert. Für $x \neq 0$ könnt ihr für y die Geradengleichung $y = \alpha \cdot x$, $\alpha \in \mathbb{R}$ einsetzen, und den Grenzwert danach wie gewohnt berechnen.





b)

Einfach einsetzen & Grenzwert berechnen.

Rechts seht ihr noch einen Plot der Funktion, falls es euch weiter hilft.

Aufgabe 2.5:

Für Niveaumengen gilt $f(x,y) = c \in \mathbb{R}$. Stellt die Gleichung auf & versucht sie zu interpretieren.

Aufgabe 2.6:

a)

Stellt die übliche Definition auf, einfach mit einer allgemeinen Norm anstatt der Standardnorm. Als Rekapitulation: Eine Menge ist genau dann offen, wenn man für jeden Punkt in der Menge einen Ball mit Radius > 0 finden kann, welcher ebenfalls vollkommen in der Menge liegt. (Das jetzt noch mathematisch)

b)

Nutzt eure Definition aus a) sowie die Äquivalenz aller Normen auf $\mathbb{R}^n$ aus:
Seien $\|\cdot\|_a, \|\cdot\|_b$ zwei unterschiedliche Normen auf dem $\mathbb{R}^n$, dann gilt

$$c \cdot \|\cdot\|_a \leq \|\cdot\|_b \leq C \cdot \|\cdot\|_a \quad \text{für } c, C \in \mathbb{R}$$

Die Normen haben also dieselben konvergenten Folgen.
Zeigt beide Richtungen der Aussage.

c)

Normale ε, δ-Definition, nur mit einer allgemeinen Norm.

d)

Analoges Vorgehen zu b)